

Singuliere oplossingen van de Helmholtz - vergelijking in twee dimensies.

Door
G. M. Veltkamp

1 Vergelijking $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k^2 \right) \varphi = 0$

Standaard-oplossing: $k^2 = 0$ (potentiaal-vergelijking):

$$\varphi(x, y) = \ln \left(\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} \right)$$

$k^2 \neq 0$ (Helmholtz - vergelijking):

$$\varphi(x, y) = K_0(k \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}).$$

N.B : $K_0(r) \sim -\ln r$ voor $r \rightarrow 0$.

$$K_0(r) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2r}} e^{-r} \text{ voor } r \rightarrow \infty.$$

2 Differentiaal-operator

$$D_\theta \stackrel{\text{def}}{=} -\cos \theta \frac{\partial}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial}{\partial y}$$

pool: $u(\xi, \eta) = \begin{cases} -\ln(\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}) & k^2 = 0 \\ K_0(k \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}) & k^2 \neq 0. \end{cases}$

dipool: $D_\theta u(\xi, \eta)$

2^n -pool: $D_{\theta_n} \dots D_{\theta_1} D_{\theta_1} u(\xi, \eta).$

Stelling. Als $F(x, y)$ voldoet aan $\Delta F - k^2 F = 0$, dan is

$$D_{\theta_2} D_{\theta_1} F = \{ D_{\theta_1 + \theta_2 - \theta_3} D_{\theta_3} + k^2 \sin(\theta_1 - \theta_3) \sin(\theta_2 - \theta_3) \} F.$$

Speciale gevallen:

1 $\theta_3 = \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2) \rightarrow D_{\theta_2} D_{\theta_1} = D_{\frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2)}^2 - k^2 \sin^2 \frac{1}{2}(\theta_1 - \theta_2).$

2. $\theta_3 = 0 \rightarrow D_{\theta_2} D_{\theta_1} = D_{\theta_1 + \theta_2} D_0 + k^2 \sin \theta_1 \sin \theta_2$

3. Als $k^2 = 0$, dan generalisatie

$$D_{\theta_n} \dots D_{\theta_1} D_{\theta_1} = D_{\bar{\theta}}^n \quad \text{met} \quad \bar{\theta} = \frac{1}{n} (\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n)$$

Gevolg Voor $k^2 = 0$ slechts één soort 2^n -polen (op translaties en rotaties na).

Voor $k^2 \neq 0$ lineaire combinaties van standaard-typen.

3. Lijnen met polen en hogere singulariteiten.

A. Geval $k^2 = 0$

Lijn met polen met constante sterkte:

$$v(0, a) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^a u(\xi) d\xi = (x-a) \ln(\sqrt{(x-a)^2 + y^2}) - x \ln(\sqrt{x^2 + y^2}) - y \left\{ \arctg \frac{y}{x-a} - \arctg \frac{y}{x} \right\} + a$$

($\arctg \frac{y}{x} = \arg(x + iy)$, tussen $-\pi$ en $+\pi$).

Lijn met normale dipolen met constante sterkte:

$$w(0, a) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^a D_{\frac{1}{2}} u(\xi) d\xi = \arctg \frac{y}{x-a} - \arctg \frac{y}{x}$$

Differentiatie: $D_0 v(0, a) = u(a) - u(0)$.

$$D_{\frac{1}{2}} v(0, a) = v(0, a)$$

$$D_0 w(0, a) = D_{\frac{1}{2}} u(a) - D_{\frac{1}{2}} u(0)$$

$$D_{\frac{1}{2}} w(0, a) = -D_{\frac{1}{2}} u(a) + D_0 u(0)$$

Eigenschappen $v(0, a)$:

1e continu

2e $\frac{\partial v}{\partial y}$ discontinu langs $(0, a)$: $\left. \frac{\partial v}{\partial y} \right|_- = -2\pi$

3e $\frac{\partial v}{\partial x}$ en hogere afgeleiden alleen singulier in eindpunten.

Eigenschappen $w(0, a)$:

1e discontinu langs $(0, a)$: $\left. w \right|_- = 2\pi$

2e afgeleiden alleen singulier in eindpunten.

Lijn met schieve dipolen:

$$\int_0^a D_{\theta} u(\xi) d\xi = \cos\theta (v(a) - u(0)) + \sin\theta w(0, a)$$

Lijn met quadrupolen:

$$\int_0^a D_{\theta_2} D_{\theta_1} u(\xi) d\xi = D_{\theta_1 + \theta_2} u(a) - D_{\theta_1 + \theta_2} u(0)$$

B. Geval $k^2 \neq 0$

Lijn met polen met constante sterkte:

$$v(0) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{\infty} u(\xi) d\xi = \pi U(x) e^{-|y|} - \frac{1}{2} \operatorname{sgn} x \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x| \cosh t + iy \sinh t} \frac{dt}{\cosh t}$$

Lijn met normale dipolen met constante sterkte:

$$w(0) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^\infty D_{\frac{\pi}{2}} u(\xi) d\xi = \pi U(x) \operatorname{sgn} y e^{-|y|} + \frac{i}{2} \operatorname{sgn} x \int_{-\infty}^\infty e^{-|x| \cosh t + i y \sinh t} \sinh t dt.$$

Differentiatie:

$$D_0 v(0) = -u(0)$$

$$D_{\frac{\pi}{2}} v(0) = w(0)$$

$$D_0 w(0) = -D_{\frac{\pi}{2}} u(0)$$

$$D_{\frac{\pi}{2}} w(0) = v(0) + D_0 u(0)$$

Eigenschappen $v(0)$:

1a: continu

2a: $\frac{\partial v}{\partial y}$ discontinu langs $(0, \infty)$: $\left. \frac{\partial v}{\partial y} \right|_-^+ = -2\pi$

3a: $\frac{\partial^k v}{\partial y^k}$ continu als k even, discontinu als k oneven.

4a: afgeleide naar x en gemengde afgeleiden alleen singulier in 0.

Eigenschappen $w(0)$:

1a discontinu langs $(0, \infty)$: $w|_-^+ = 2\pi$.

2a $\frac{\partial^k w}{\partial y^k}$ continu als k oneven, discontinu als k even.

3: afgeleiden naar x en gemengde afgeleiden alleen singulier in 0.

Lijn met schieve dipolen:

$$\int_0^\infty D_\theta u(\xi) d\xi = D_\theta v(0) = -\cos \theta u(0) + \sin \theta w(0).$$

Lijn met quadrupolen:

$$\int_0^\infty D_{\theta_2} D_{\theta_1} u(\xi) d\xi = D_{\theta_2} D_{\theta_1} v(0) = -D_{\theta_1 + \theta_2} u(0) + \sin \theta_1 \sin \theta_2 v(0).$$

4. Draaiingsoperator.

$$T_\alpha(F(x, y)) \stackrel{\text{def}}{=} F(x \cos \alpha + y \sin \alpha, -x \sin \alpha + y \cos \alpha).$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{D.w. z. Als } x' = x \cos \alpha + y \sin \alpha \\ y' = -x \sin \alpha + y \cos \alpha \end{array} \right\} x' + iy' = (x + iy) e^{-i\alpha}$$

dan wordt aan het punt (x, y) de functie-waarde in het punt (x', y')
 .. dat uit (x, y) ontstaat door terugdraaien over α - toegevoegd.

Draaiingsoperator, werkend op functie met "Aufpunkt". Functie $F(x-a, y-b)$ (in het vorige genoteerd als $F(a, b)$).

$$T_{\alpha} F(a, b) = F(x-a) \cos \alpha + (y-b) \sin \alpha, \quad -(x-a) \cos \alpha + (y-b) \sin \alpha).$$

Eigenschappen:

$$1^{\circ} T_{\alpha} T_{\beta} = T_{\alpha+\beta}$$

$$2^{\circ} T_{\alpha+2\pi} = T_{\alpha}$$

$$3^{\circ} \text{ Differentiatie: } D_{\theta} T_{\alpha} = T_{\alpha} D_{\theta-\alpha}$$

Voorbeelden:

$T_{\alpha} u(a, b) = u(a, b)$: pool is invariant bij draaiing.

$T_{\alpha} D_{\theta} u(a, b) = D_{\alpha+\theta} u(a, b)$: gedraaide dipool

$T_{\alpha} v(a) =$ gedraaide lijn met polen.

$T_{\alpha} w(a) =$ gedraaide lijn met dipolen.

5 Scheve randvoorwaarde

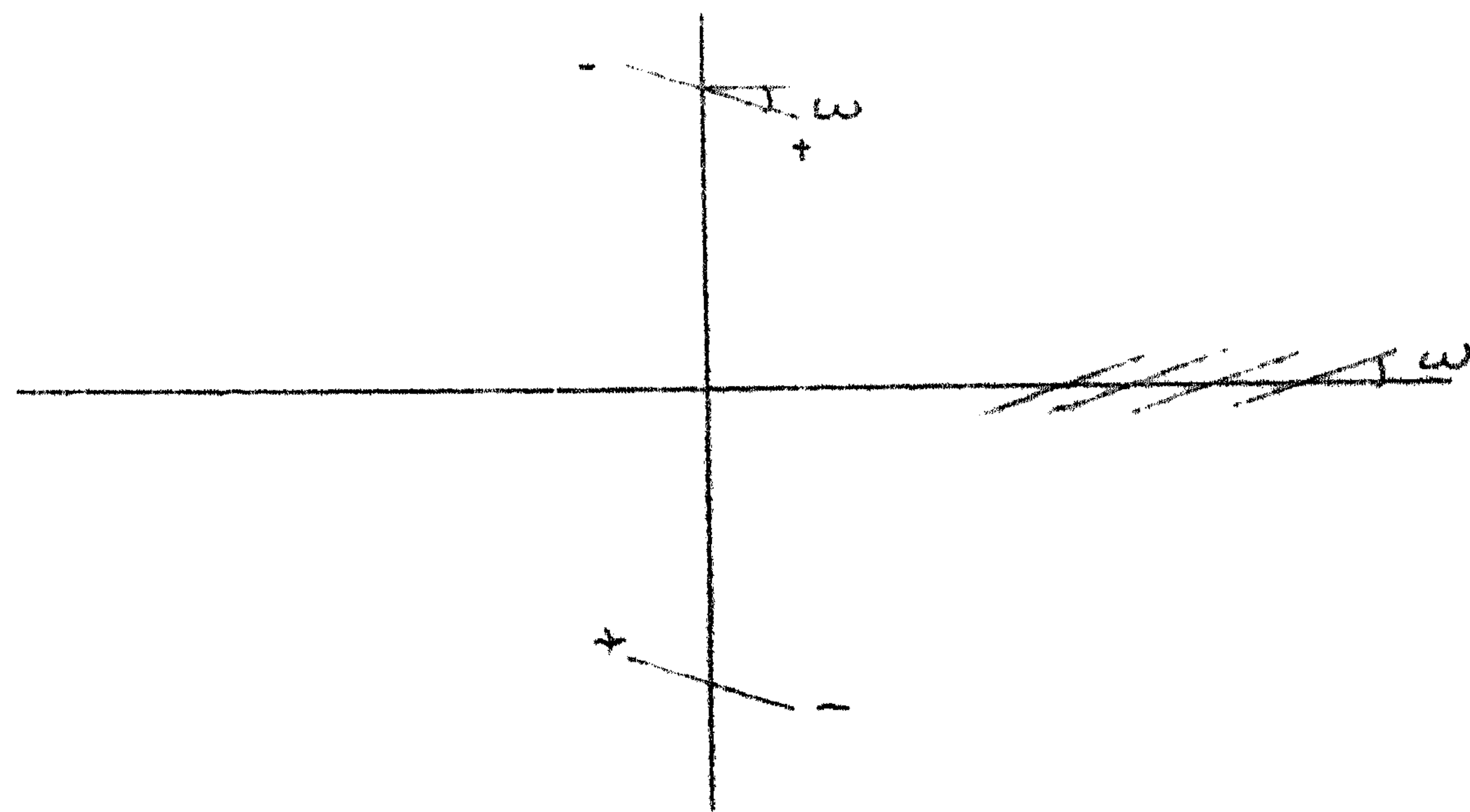
De voorwaarde $\cos \omega \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \sin \omega \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$ voor $y = 0$ kan geschreven worden $D_{\omega} \varphi = 0$ voor $y = 0$.

Stelling Als $\psi(x, y)$ een oneven functie van y is, dan voldoet $\varphi(x, y) = D_{-\omega} \psi$ aan $D_{\omega} \varphi = 0$ voor $x = 0$.

Toepassingen ($k^2 \neq 0$)

1. Kies $\psi = u(0, a) - u(0, -a)$,

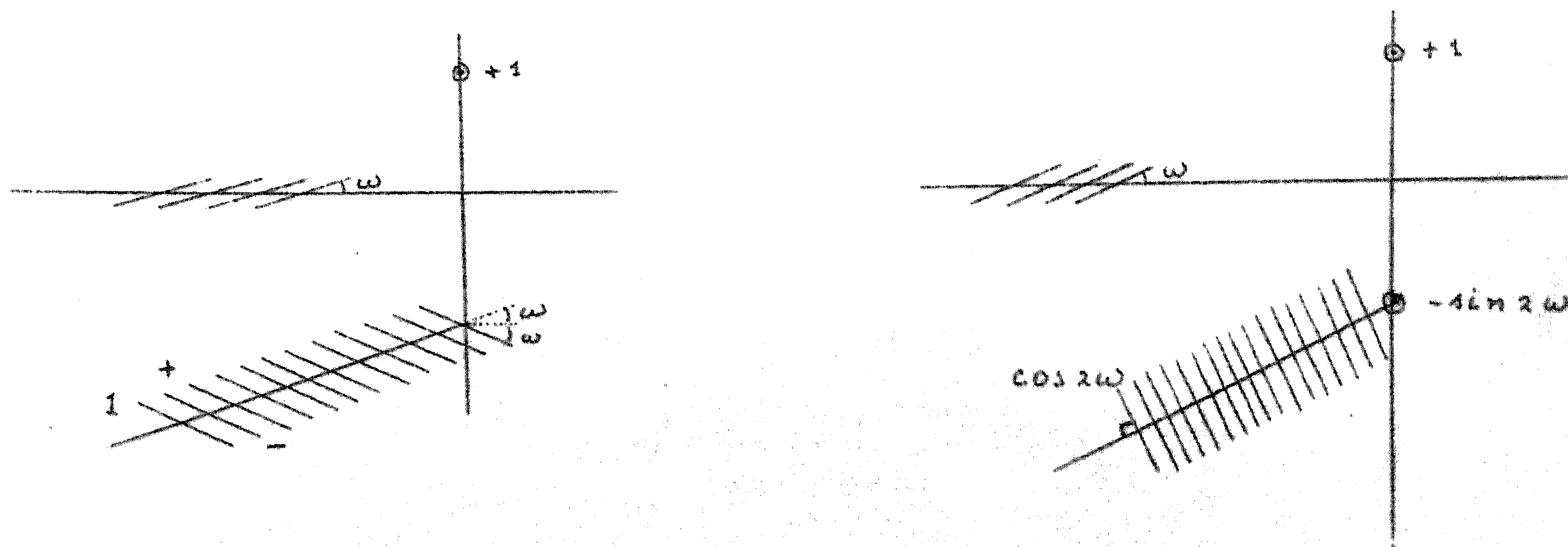
Geeft $\varphi = D_{-\omega} u(0, a) - D_{-\omega} u(0, -a)$.



2. Kies $\psi = T_{\pi-\omega} v(0, a) - T_{-\pi+\omega} v(0, a)$

Geeft $\varphi = u(0, a) + T_{-\pi+\omega} D_{-\omega} v(0, -a)$

$$= u(0, a) - \cos 2\omega u(0, -a) - \sin 2\omega T_{-\pi+\omega} w(0, a)$$



3. Analooq blijkt dat $\varphi = u(a,0) + T_{\omega+\frac{\pi}{2}} D_{-2\omega} v(-a,0)$

en

$$\varphi = T_{-\frac{\pi}{2}} \omega D_{-2\omega} v(a,0) + u(-a,0)$$

voldoen aan de randvoorwaarde $D_{-\frac{\pi}{2}} \omega \varphi = 0$ voor $x = 0$.

